

امتحان السداسي الأول

التمرين الأول: (4ن)

اجب بـ صح أو خطأ وصحح الخطأ إن وجد:

1- حسب نظرية Guldin عند دوران سطح مساحته S يولد مساحة تساوي حاصل جداء طول هذا السطح وطول محيط الدائرة المشكل بمركز الكتلة لهذه المساحة

$$\text{rot}(f\vec{A}) = \text{grad}f \wedge \vec{A} - f\text{rot}\vec{A} \quad -2$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{R} \cdot \text{rot}\vec{A} + \vec{A} \text{div}\vec{B} \quad -3$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) + \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad -4$$

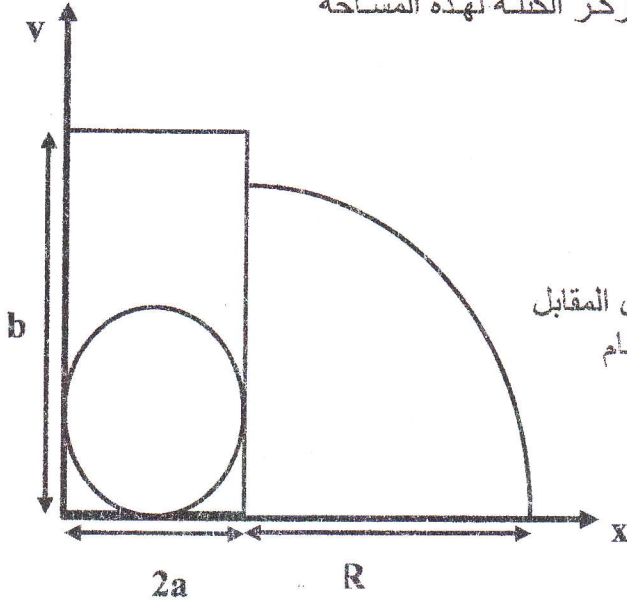
التمرين الثاني: (6ن)

النظام التالي ممتثل في جسم سطحي كما هو موضح في الشكل المقابل

- أحسب إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) G لهذا النظام

بطريقة التكامل

حيث يعطى مركز العطالة (الكتلة) للقرص بـ $G_3(a, a)$



التمرين الثالث (8ن)

إليك الشكل التالي ممتثل في الجسم المتجانس (S).

ويتكون من مخروط مملوء ذو الكتلة M والارتفاع h

ونصف القطر R ونصف كرة ذات الكتلة m ولها

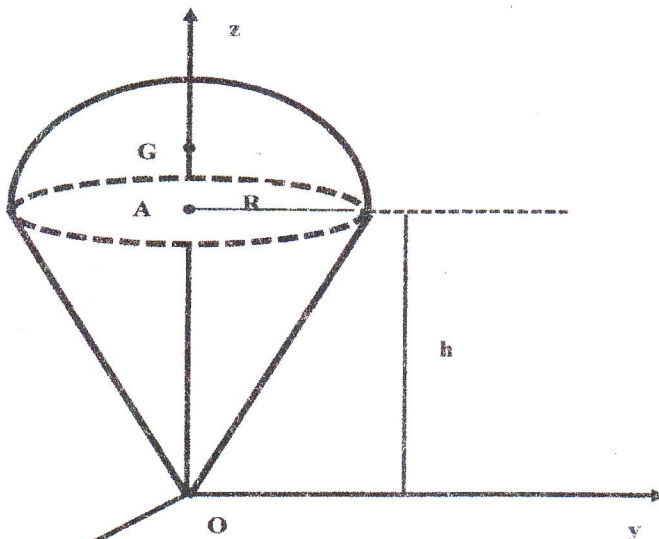
نفس نصف القطر R ، ملتصقين (مخروط ونصف الكرة).

- حدد مصفوفة العطالة للجسم (s) بالنسبة للنقطة O في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

حيث يعطى: $\vec{AG} = \frac{3}{8}R\vec{k}$ (G : مركز عطالة الجسم (S))

الحجم العنصري بالنسبة للكرة: $dv = r d\theta r \cos \varphi d\varphi dr$

حيث: $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$



بالتوفيق

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الأول

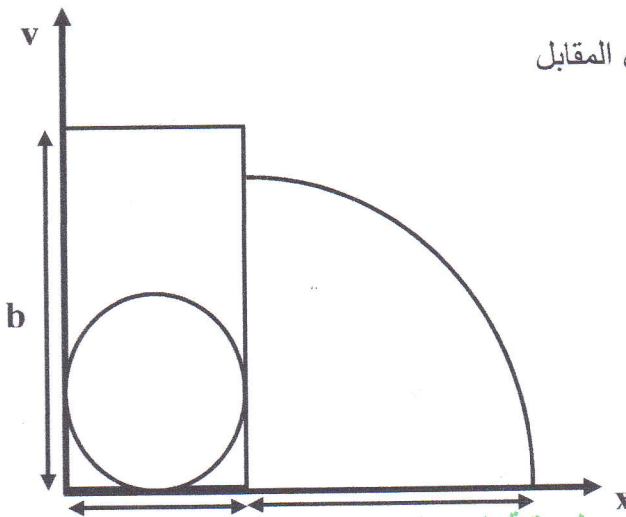
التمرين الأول: (4ن)

اجب بـ صح أو خطأ وصحح الخطأ إن وجد:

الرقم	صح أو خطأ	العلامة	التصحيح	العلامة
1	خطأ	0.5	حسب نظرية Guldin عند دوران سطح مساحته S يولد مساحة (حجما) تساوي حاصل جداء طول (مساحة) هذا السطح وطول محيط الدائرة المشكل بمركز الكتلة لهذه المساحة	0.25+0.25
2	خطأ	0.5	$\text{rot}(f\vec{A}) = \text{grad}f \wedge \vec{A} + f\text{rot}\vec{A}$	0.5
3	خطأ	0.5	$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B}$	0.5
4	خطأ	0.5	$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$	0.5

التمرين الثاني: (7ن)

النظام التالي ممتثل في جسم سطحي كما هو موضح في الشكل المقابل



- حساب إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) G لهذا النظام بطريقة التكامل
يقسم النظام الى ثلاث أجزاء (الجزء الأول عبارة عن ربع قرص G_1 ، الجزء الثاني عبارة عن مستطيل G_2 ، الجزء الثالث عبارة عن قرص $G_3(a, a)$)
الجزء 1: إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) لربع قرص G_1

الكتلة العنصرية	$dm_1 = \sigma ds_1 = \sigma r dr d\theta$	0.25
بحيث:	$0 \leq r \leq R$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	0.25
اذن:	$m_1 = \int dm_1 = \int_0^R r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\sigma \pi R^2}{4}$	0.25
ولدينا:	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$	0.25
وتعطى احداثيات مركز العطالة بعلاقتي	$x_{G_1} = 2a + \frac{1}{m_1} \int x dm_1$	0.5
	$y_{G_1} = \frac{1}{m_1} \int y dm_1$	0.5

0.25	$x_{G_1} = 2a + \frac{1}{m_1} \int x dm_1 = 2a + \frac{1}{\frac{\sigma \pi R^2}{4}} \sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = 2a + \frac{4R}{3\pi}$	إن:
0.25	$y_{G_1} = \frac{1}{m_1} \int y dm_1 = \frac{1}{\frac{\sigma \pi R^2}{4}} \sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{4R}{3\pi}$	
/	$G_1(2a + \frac{4R}{3\pi}; \frac{4R}{3\pi}) ; S_1 = \frac{\pi R^2}{4}$	ومنه:

الجزء 2: إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) للمستطيل G_2

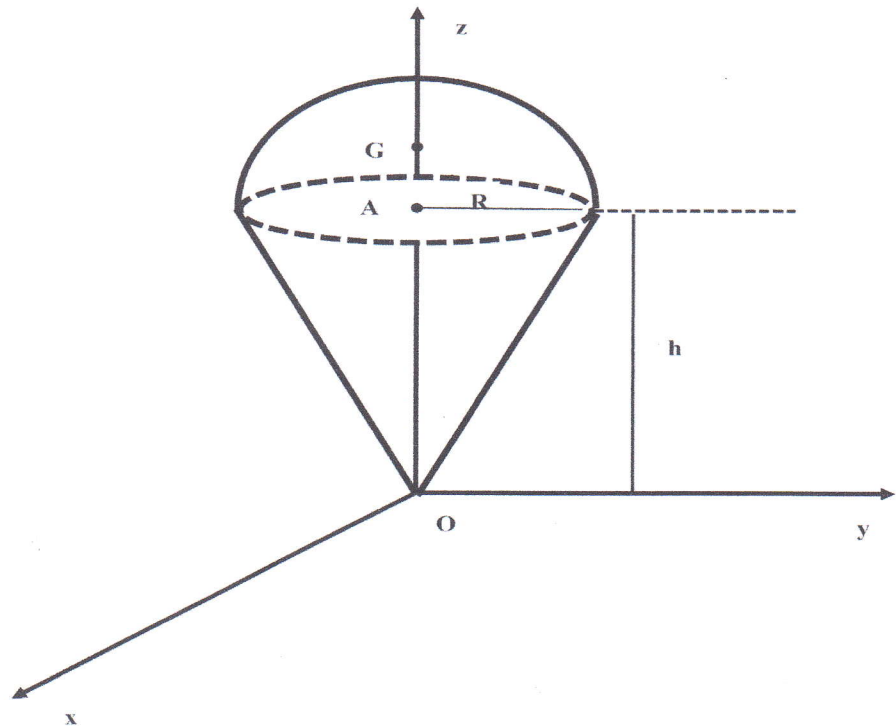
0.25	$m_2 = \int dm_2 = \int \sigma dS_1 = \sigma \iint dx dy$	
0.25	$0 \leq x \leq 2a ; 0 \leq y \leq b$	حيث:
0.25	$m_2 = \sigma \int_0^{2a} dx \int_0^b dy = \sigma 2ab$	إن:
0.5	$x_{G_2} = \frac{1}{m_2} \int x dm_2$	وتعطى إحداثيات مركز العطالة بعلاقتي
0.5	$y_{G_2} = \frac{1}{m_2} \int y dm_2$	
0.25	$x_{G_2} = \frac{1}{\sigma 2ab} \sigma \int_0^{2a} x dx \int_0^b dy = a$	إن:
0.25	$y_{G_2} = \frac{1}{\sigma 2ab} \sigma \int_0^{2a} dx \int_0^b y dy = \frac{b}{2}$	
/	$G_2(a; \frac{b}{2}) ; S_2 = 2ab$	ومنه:
0.25	$G_3(a; a) ; S_3 = \pi a^2$	<u>الجزء 3: إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) قرص G_3</u>
		<u>إحداثيات مركز العطالة (الكتلة) للنظام هي:</u>
0.5	$\begin{cases} x_G = \frac{x_{G_1} m_1 + x_{G_2} m_2 - x_{G_3} m_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{x_{G_1} S_1 + x_{G_2} S_2 - x_{G_3} S_3}{S_1 + S_2 - S_3} \\ y_G = \frac{y_{G_1} m_1 + y_{G_2} m_2 - y_{G_3} m_3}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{y_{G_1} S_1 + y_{G_2} S_2 - y_{G_3} S_3}{S_1 + S_2 - S_3} \end{cases}$	
0.5		

0.5	$x_G = \frac{\left(2a + \frac{4R}{3\pi}\right) \frac{\pi R^2}{4} + a \cdot 2ab - a \cdot \pi a^2}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}a + \frac{R}{3\pi}\right) \pi R^2 + 2a^2b - \pi a^3}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2}$
0.5	$y_G = \frac{\frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{4} + \frac{b}{2} \cdot 2ab - a \cdot \pi a^2}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2} = \frac{\frac{R^3}{3} + ab^2 - \pi a^3}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2}$
/	$G \left(\frac{\left(\frac{1}{2}a + \frac{R}{3\pi}\right) \pi R^2 + 2a^2b - \pi a^3}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2}; \frac{\frac{R^3}{3} + ab^2 - \pi a^3}{\frac{\pi R^2}{4} + 2ab - \pi a^2} \right)$ ومنه:

التمرين الثالث (9) مصفوفة العطالة للجسم:

0.5	$I_O(S) = I_O(S_1) + I_O(S_2)$ مصفوفة العطالة للجسم (S) بالنسبة لـ O هي: حيث: S_1 : يمثل المخروط S_2 : يمثل نصف الكرة
	<u>تحديد مصفوفة العطالة للمخروط (S_1):</u>
0.5	المستويين (xoz) و (yoz) متناظرين إذن: $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$
0.5	المحورين (ox) و (oy) لهما نفس الدور بالتالي: $I_{xx} = I_{yy}$
0.5	لدينا: $x^2 + y^2 = r^2$
0.25	كتلة المخروط: $dM = \rho dv = \rho 2\pi r dr dz$ لدينا
0.25	حيث: $0 \leq z \leq h; 0 \leq r \leq \frac{R}{h}z$
0.25	إذن: $M = \int dM = 2\pi\rho \int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \int_0^h dz = \frac{1}{3}\pi\rho R^2 h$
	ومنه: $3m = \pi\rho R^2 h$
0.25	ولدينا: $I_{zz} = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dM = 2\pi\rho \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2}\rho\pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h z^4 dz$
0.25	$I_{zz} = \frac{3M}{10} R^2$
0.25	ولدينا: $2I_{xx} = I_{xx} + I_{yy} = \int (y^2 + z^2) dM + \int (x^2 + z^2) dM = \int (x^2 + y^2) dM + 2 \int z^2 dM = I_{zz} + 2 \int z^2 dM$
0.25	إذن: $I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} + \int z^2 dM$
0.25	$I_{xx} = \frac{3M}{20} R^2 + \int z^2 2\pi\rho r dr dz = \frac{3M}{20} R^2 + 2\pi\rho \int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \int_0^h z^2 dz$

0.25	$I_{xx} = \frac{3M}{20} R^2 + \pi \rho \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{3M}{20} R^2 + \frac{3Mh^2}{5}$
0.5	إذن: مصفوفة العطالة للمخروط هي: $I_o(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{3M}{20} R^2 + \frac{3Mh^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{20} R^2 + \frac{3Mh^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3M}{10} R^2 \end{bmatrix}$



1- تحديد مصفوفة العطالة لنصف الكرة (S₂) بالنسبة للمركز O:

من أجل تحديد مصفوفة العطالة لنصف الكرة (S₂) بالنسبة لـ (O) يجب ان نمر من مركز العطالة للجسم (S) فنستعمل

نظرية Huygens مرتين: O → G → A

0.5	المستويين (xoz) و (yoz) متناظرين إذن: $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$
0.5	- المحاور: (ox) و (oy) و (oz) لهم نفس الدور بالتالي: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ (A: مركز نصف الكرة، في تناظر نصف الكرة لدينا: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$)
0.5	لدينا: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
0.25	كتلة نصف الكرة (S ₂): لدينا: $dm = \rho dv = \rho r dr d\theta \cos\phi d\phi$

	حيث : $0 \leq r \leq R ; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi$
0.25	$m = \int dm = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{2}{3} \pi \rho R^3$ $3m = 2\pi \rho R^3$
0.25	$3I_{xx} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int (y^2 + z^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \int (y^2 + x^2) dm$ $= 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm$
0.25	$I_{xx} = \frac{2}{3} \int r^2 dm = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{4}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2$
0.5	$I_A(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}$
0.25	حسب نظرية Huygens فإن : $I_A(S_2) = I_G(S_2) + m d^2$ حيث إحداثيات G بالنسبة لـ A هي : $G(0, 0, \frac{3}{8} R)$ $\Rightarrow I_G(S_2) = I_A(S_2) - m d^2$
0.25	فنتحصل على مايلي: $I_G(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 - m \left(\frac{3}{8} R\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 - m \left(\frac{3}{8} R\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}$ $I_G(S_2) = m R^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
0.25	مصفوفة العطالة بالنسبة لـ O هي : $I_O(S_2) = I_G(S_2) + m D^2$ حيث إحداثيات G بالنسبة لـ O هي : $G(0, 0, h + \frac{3}{8} R)$ فنتحصل على مايلي:

0.5	$I_O(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 - m\left(\frac{3}{8}R\right)^2 + m\left(h + \frac{3}{8}R\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 - m\left(\frac{3}{8}R\right)^2 + m\left(h + \frac{3}{8}R\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}$ $I_O(S_2) = m \begin{bmatrix} \frac{2}{5}R^2 - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 + \left(h + \frac{3}{8}R\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}R^2 - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 + \left(h + \frac{3}{8}R\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}R^2 \end{bmatrix}$
0.25	إذن مصفوفة العطالة للجسم (S) هي : $I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ حيث : $\begin{cases} A = M\left(\frac{3}{20}R^2 + \frac{3h^2}{5}\right) + m\left(\frac{2}{5}R^2 - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 + \left(h + \frac{3}{8}R\right)^2\right) \\ B = M\left(\frac{3}{20}R^2 + \frac{3h^2}{5}\right) + m\left(\frac{2}{5}R^2 - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 + \left(h + \frac{3}{8}R\right)^2\right) \\ C = \frac{3M}{10}R^2 + m\frac{2}{5}R^2 \end{cases}$